Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2014

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
a	b	b	c

1) Le point I appartient au plan (EFB), qui est parallèle au plan (HGC), d'où la distance du point I au plan (HGC) est la longueur de l'arête du cube. C'est-à-dire la distance du point I au plan (HGC) est égale à 1.

2) S la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$.

La distance du point I au plan (EFH) est égale à $\frac{1}{2}$, rayon de la sphère, donc la sphère est tangente au plan (EFH). Par suite l'intersection de cette sphère avec le plan (EFH) est un seul point.

3) Les deux vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires et de sens contraires. D'autre part $AH = \sqrt{2}$, diagonale d'un carré de côté 1.

D'où $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = -AH^2 = -2$.

4) $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est un vecteur normal au plan (EFD).

Le côté $[DC]$ du cube est parallèle au côté $[EF]$, donc le vecteur $\overrightarrow{DC}$ n'est pas normal au plan (EFD). D'où $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{DC}$.

On peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$. Graphiquement, on peut voir que le vecteur $\overrightarrow{BF}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{FD}$. On peut confirmer cela par le calcul :

$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BF}.\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}\right) = \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{GD} = 0 + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD} \neq 0$. Donc $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{BF}$.

Ainsi $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AH}$.

Remarque : Pour les questions 3) et 4), on peut considérer un repère de l'espace et vérifier par le calcul.

www.bac.org.tn

Exercice 2

1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(\sqrt{2}+2+i\sqrt{2})\,z+2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=0$.

a) Vérifions que 2 est une solution de l'équation (E) :

$2^2-2(\sqrt{2}+2+i\sqrt{2})+2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}-4-2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}=0.$

D'où 2 est une solution de l'équation (E).

b) Soit z_2 l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$2+z_2=\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}\Rightarrow z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$

- On peut utiliser le produit des racines :

$2.z_2=2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\Rightarrow z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$

2) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A et B les points d'affixes respectives $z_A=2$ et $z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a) $z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Voir la figure.

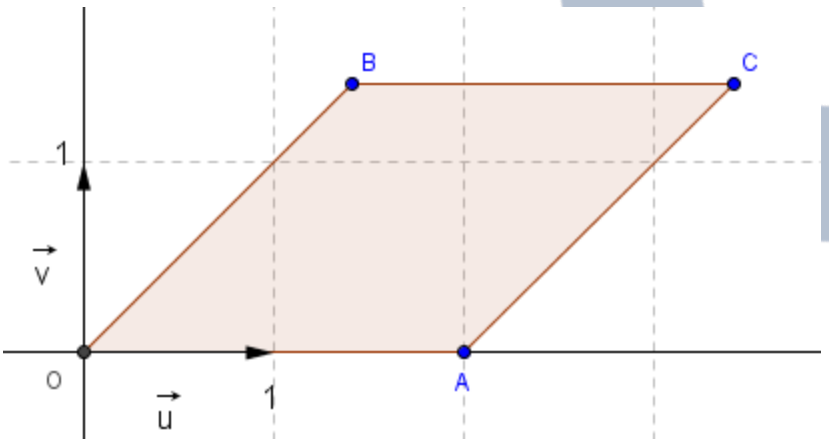
Pour placer le point B, il suffit de remarquer que $|z_B|=2$ et $\arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc B est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et tel que $(\vec{u},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

3) Soit C le point d'affixe $z_C=2+z_B$.

a) Voir la figure.

On a $z_C=2+z_B$, d'où le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $2\vec{u}$.



b) Montrons que le quadrilatère OACB est un losange :

www.bac.org.tn

$OA = |z_A| = 2$; $OB = |z_B| = 2$; $BC = |z_C - z_B| = |2 + z_B - z_B| = |2| = 2$

et $AC = |z_C - z_A| = |2 + z_B - 2| = |z_B| = 2.$

On a $OA = OB = AC = BC,$ d'où OACB est un losange.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8}}.e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}.e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8}+i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}+i\frac{\pi}{8}} = e^{i\times 0} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}.$

D'où $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}.$

d) $z_C = 2 + z_B = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}} = 4\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}.$

e) $z_C = 4\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}} = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$

D'autre part $z_C = 2 + z_B = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$

Par identification des deux parties réelles on obtient : $4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2}.$

$$4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} - 1$$

$$= \frac{4-(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{6-2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

$\tan^2\frac{\pi}{8} = 3 - \sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$; d'où $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ car on sait que $\tan\frac{\pi}{8} > 0.$

Exercice 3

I] Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1.$

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	g(0)	↗	$+\infty$

1) $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$

www.bac.org.tn

2) En exploitant le tableau de variation de g et en tenant compte du fait que $g(0)=0$, on peut conclure que $g(x)\geq 0$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

II] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$.

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}+x-2=-\infty$; car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+2)e^{-x}+x-2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{2}{x})e^{-x}+1-\dfrac{2}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(-\infty)$.

c) La droite $\Delta: y=x-2$.

$f(x)-(x-2)=(x+2)e^{-x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}+2e^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}+2e^{-x}=0\ ;\ \text{car}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$, d'où la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) de f.

d) On se propose d'étudier la position de la courbe (C) et Δ.

$f(x)-(x-2)=(x+2)e^{-x}$.

Le signe de $f(x)-(x-2)$ est celui de $x+2$, car $e^{-x}>0$. On a donc :

- Si $x<-2$ on a $x+2<0$ et $f(x)-(x-2)<0$. Dans ce cas la courbe (C) est au-dessous de Δ.
- Si $x=-2$ on a $x+2=0$ et $f(x)-(x-2)=0$. La courbe (C) coupe Δ au point d'abscisse (-2).
- Si $x>-2$ on a $x+2>0$ et $f(x)-(x-2)>0$. Dans ce cas la courbe (C) est au-dessus de Δ.

2)a) $f(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$; $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}+1$$
$$=e^{-x}-xe^{-x}-2e^{-x}+1$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$
$$=e^{-x}(-x-1+e^x)$$
$$=e^{-x}(e^x-x-1)=e^{-x}g(x).$$

On a ainsi : $f'(x)=e^{-x}g(x)$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

www.bac.org.tn

b) $f'(x)=e^{-x}g(x)$; pour tout $x\in\mathbb{R}$. D'où le signe de f' est celui de g.

Par suite $f'(x)\geq 0$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}+x-2=+\infty.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3)a) $f'(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$; $x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=-e^{-x}+xe^{-x}-e^{-x}=xe^{-x}$; $x\in\mathbb{R}$.

f'' s'annule en changeant de signe en 0, d'où le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Voir la figure.

4) Soit λ un réel strictement supérieur à (-2).

$A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x=-2$ et $x=\lambda$.

a) $A(\lambda)=\int_{-2}^{\lambda}(f(x)-(x-2))dx=\int_{-2}^{\lambda}(x+2)e^{-x}dx$.

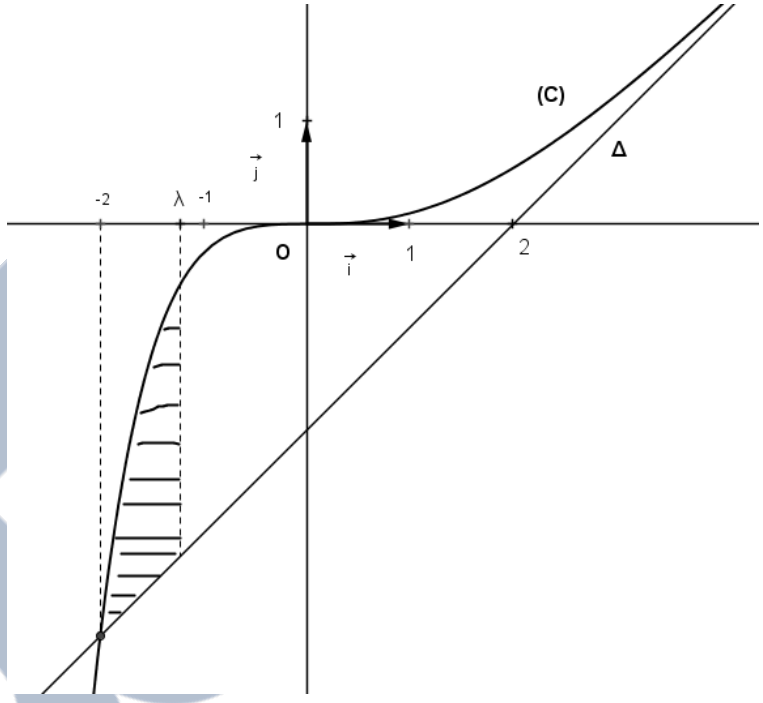
On pose : $u(x)=x+2 \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-x} \Rightarrow v(x)=-e^{-x}$

$$I=\int_{-2}^{\lambda}(x+2)e^{-x}dx=\left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda}+\int_{-2}^{\lambda}e^{-x}dx$$
$$=-(\lambda+2)e^{-\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda}$$
$$=-(\lambda+2)e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+e^{2}=e^{2}-(\lambda+3)e^{-\lambda}\ ua.$$

b) $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty} e^{2}-(\lambda+3)e^{-\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty} e^{2}-\lambda e^{-\lambda}+3e^{-\lambda}=e^{2}$.

www.bac.org.tn



Exercice 4

Une usine de fabrication de machines effectue deux tests : électrique et mécanique.

- 81% des machines n'ont aucun défaut
- 10% des machines ont un défaut électrique
- Parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique.

E : « la machine présente un défaut électrique »

M : « la machine présente un défaut mécanique »

1)a) On a 10% des machines ont un défaut électrique, d'où $p(E)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0,1$.

$\overline{E}$: « la machine ne présente pas un défaut électrique »

$\overline{M}$: « la machine ne présente pas un défaut mécanique »

$\overline{E}\cap\overline{M}$: « la machine ne présente pas un défaut électrique et ne présente pas un défaut mécanique». C'est-à-dire la machine ne présente aucun défaut.

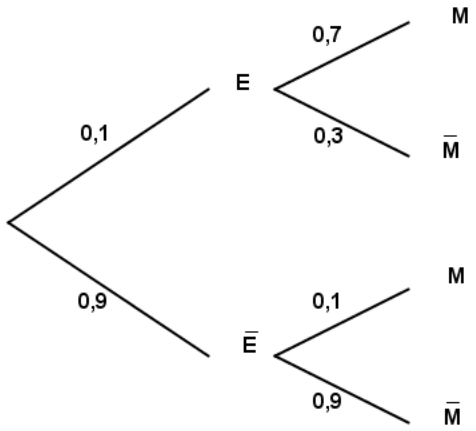
81% des machines n'ont aucun défaut, d'où $p(\overline{E}\cap\overline{M})=\frac{81}{100}=0,81$.

b) $p(E)=0,1 \Rightarrow p(\overline{E})=1-p(E)=1-0,1=0,9$.

$p(\overline{M}/\overline{E})=\frac{p(\overline{E}\cap\overline{M})}{p(\overline{E})}=\frac{0,81}{0,9}=0,9$.

www.bac.org.tn

2)a) L'arbre pondéré associé à la situation :



b) $p(M) = p(E).p(M/E) + p(\overline{E}).p(\overline{M}/\overline{E}) = 0,1\times 0,7 + 0,9\times 0,1 = 0,16.$

c) Soit p la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts.

$p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M).$

D'après l'énoncé, parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique. Autrement dit, parmi les machines ayant un défaut électrique 70% ont aussi un défaut mécanique. D'où $p(E \cap M) = \frac{70}{100} = 0,7.$

Par suite $p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M) = 0,1 + 0,16 - 0,7 = 0,19.$

3) On effectue le contrôle de 20 machines.

X la variable aléatoire donnant le nombre de machines qui présentent au moins un des deux défauts.

a) Le contrôle d'une machine est une épreuve à deux issues contraires : la machine présente au moins un des deux défauts ou la machine ne présente aucun des deux défauts. Le fait de contrôler 20 machines, cela correspond à la répétition de cette épreuve 20 fois. La variable X joue le rôle d'un compteur des machines ayant au moins l'un des défauts parmi ces 20 machines. D'où X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,19 (la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts).

$p(X = k) = C_{20}^{k}(0,19)^{k}(1-0,19)^{20-k} = C_{20}^{k}(0,19)^{k}(0,81)^{20-k}$; $k \in \{0,1,...,20\}$.

b) La probabilité que deux exactement des 20 machines présentent au moins un des deux défauts :

$p(X = 2) = C_{20}^{2}(0,19)^{2}(0,81)^{18} = 190\times(0,19)^{2}\times(0,81)^{18} \simeq 0,15.$

www.bac.org.tn